DAN GURGUI

METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE ARITMETICĂ PENTRU PĂRINŢI ŞI COPII

EDITURA *SITECH*
Craiova

CUPRINS

CAPITOLUL I

METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE ARITMETICĂ

METODA REDUCERII LA UNITATE

Această metodă prezintă avantajul că este foarte accesibilă elevilor şi poate fi utilizată într-o gamă variată de probleme. Pentru a folosi metoda reducerii la unitate în rezolvarea unei probleme trebuie în primul rând stabilită natura dependenței care există între diferitele mărimi care apar în enunțul proplemei, iar dacă aceste dependențe sunt direct proporționale sau invers proporționale cu mărimea pe care problema ne cere să o aflăm, atunci metoda poate fi folosită.

Problema 1. Mărind un număr de 7 ori se obține 301. Cât se va obține dacă acelaşi număr îl vom mări de 5 ori.

Rezolvare

Numărul mai mic de 7 ori decât 301 este: $301 : 7 = 43$, care mărit de 5 ori ne dă: $43 \cdot 5 = 215$.

Problema 2. Pentru executarea a 360 de piese pot fi folosite trei maşini cu productivități diferite. Prima maşină poate executa piesele în 36 de ore, a doua în 18 ore iar a treia în 12 ore. În câte ore vor fi executate piesele dacă maşinile lucrează toate odată.

Rezolvare

Mai întâi vom afla câte piese poate executa într-o singură oră, fiecare din cele trei maşini: $360 : 36 = 10$ piese pe oră face prima maşină; $360 : 18 = 20$ piese pe oră face a doua maşină; $360 : 12 = 30$ piese pe oră face a treia maşină.

Aflăm câte piese fac împreună cele trei maşini într-o singură oră: $10 + 20 + 30 = 60$ de piese. Atunci 360 de piese vor fi executate în: $360 : 60 = 6$ ore.

Problema 3. O echipă formată din trei muncitori termină o lucrare în 12 zile. Dacă lucrează numai primii doi muncitori, ei termină lucrarea în 18 zile. În câte zile termină lucrarea al treilea muncitor, dacă ar lucra singur ?

Rezolvare

Într-o zi cei trei muncitori vor executa din lucrare $\frac{1}{12}$, iar primii doi muncitori vor executa din lucrare $\frac{1}{18}$, ceea ce înseamnă că al treilea muncitor va executa din lucrare: $\frac{1}{12} - \frac{1}{18} = \frac{1}{36}$. Lucrarea va fi terminată de al treilea muncitor în: $1 : \frac{1}{36} = 36$ de zile.

Strâns legat de metoda reducerii la unitate este procedeul de rezolvare a problemelor numit regula de trei simplă, care se aplică tot în cazul când dependenţa între mărimile care apar în problemă este fie direct proporţională, fie învers proporţională cu mărimea care trebuie aflată. Vom rezolva câte o problemă, pentru fiecare din cele două situaţii, pentru a vedea care este regula după care se determină mărimea cerută de problemă în fiecare din cele două cazuri.

Problema 4. Patru caiete costă 8 lei. Câţi lei se vor plăti, dacă se vor cumpăra 19 caiete.

Rezolvare

Schematic problema se scrie:

4 c .... 8 lei
19 c .... x lei. Observăm că cele două mărimi care apar în problemă (numărul de caiete şi valoarea lor) sunt mărimi direct proporţionale. Atunci, din primul rând deducem că:

1 c .... $\frac{8}{4}$ lei

19 c .... $\frac{19 \cdot 8}{4}$ lei. Se obţine că 19 caiete vor costa 38 lei.

Revăzând modul în care au fost scrise datele problemei, regula de aflare a lui x din problema scrisă schematic (când mărimile sunt direct proporţionale cu mărimea care trebuie aflată) este evidentă: $x = \frac{19 \cdot 8}{4}$.

Problema 5. Patru muncitori termină o lucrare în 9 zile. Câţi muncitori sunt necesari, pentru a termina lucrarea în 6 zile ?

Rezolvare

Schematic problema se scrie:
9 zile .... 4 mun. .... 1 întreg
6 zile .... x mun. .... 1 întreg.

Primul rând se citeşte: în 9 zile, 4 muncitori termină lucrarea. Al doilea rând se citeşte: în 6 zile, câţi muncitori termină lucrarea ?

Observăm că cele două mărimi care apar în enunţul problemei (numărul de zile şi numărul de muncitori) sunt mărimi invers proporţionale. Atunci, din primul rând deducem că:

1 zile .... $9 \cdot 4$ mun.............................. 1 întreg

6 zile .... $\frac{9 \cdot 4}{6}$ mun ....1 întreg.

Am obținut că 6 muncitori termină lucrarea în 6 zile.

Revăzând modul în care au fost scrise datele problemei, regula de aflare a lui x din problema scrisă schematic (când mărimile sunt invers proporționale cu mărimea care trebuie aflată) este evidentă: $x = \frac{9 \cdot 4}{6}$.

Strâns legat de metoda reducerii la unitate este procedeul de rezolvare a problemelor de aritmetică numit regula de trei compusă, care se aplică atunci când în problemă apar mărimi ce sunt în dependență direct proporțională cu mărimea ce trebuie aflată, dar apar și mărimi care sunt în relație de învers proporționalitate cu mărimea ce trebuie aflată. Vom da un exemplu de problemă care poate fi rezolvată prin regula de trei compusă, deducând astfel regula de aflare a necunoscutei în această situație.

Problema 6. O echipă formată din 12 muncitori lucrând câte 8 ore pe zi, sapă un șanț lung de 10 m, lat de 1,20 m și adânc de 80 cm în 4 zile. În câte zile vor săpa 15 muncitori care lucrează 5 ore pe zi, un șanț lung de 25 m, cu lățimea de 1,5 m și adânc de 1,8 m ?

Rezolvare

Punem în evidență mărimile care apar în enunțul problemei: A – numărul de muncitori; B – numărul de ore lucrate pe zi; C – numărul care ne arată câți metri are lungimea șanțului; D – numărul care ne arată câți metri are lățimea șanțului; E – numărul care ne arată câți metri are șanțul în adâncime și F – numărul de zile lucrate.

A .... B .... C .... D .... E .... F

12 .... 8 ....40 .... 1,2 .... 0,8 4

Observăm că mărimile: A şi B sunt cu mărimea F într-o relaţie de invers proporţionalitate, iar mărimile: C, D, şi E sunt cu mărimea F într-o relaţie de directă proporţionalitate. Atunci scrierile schematice prin care se va rezolva problema vor fi:

1 .... 8 .... 40 .... 1,2 ....0,8 .... $4 \cdot 12$

1 .... 1 .... 40 .... 1,2 ....0,8 .... $4 \cdot 12 \cdot 8$

1 ....1 .... 1 .... 1,2 .... 0,8 .... $\frac{4 \cdot 12 \cdot 8}{40}$

1 .... 1 ....1 ....1 .... 0,8 .... $\frac{4 \cdot 12 \cdot 8}{40 \cdot 1,2}$

1 ....1 ....1 ....1 ....1 .... $\frac{4 \cdot 12 \cdot 8}{40 \cdot 1,2 \cdot 0,8}$

15 ....1 ....1...........1 ....1 $\frac{4 \cdot 12 \cdot 8}{40 \cdot 1,2 \cdot 0.8 \cdot 15}$

15 ....5 ....1 ....1 ....1 $\frac{4 \cdot 12 \cdot 8}{40 \cdot 1,2 \cdot 0,8 \cdot 15 \cdot 5}$

15 .... 5 ....25 .... 1 ....1.......... $\frac{4 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 25}{40 \cdot 1,2 \cdot 0,8 \cdot 15 \cdot 5}$

15 .... 5 .... 25 .... 1,5 ....1............ $\frac{4 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 25 \cdot 1,5}{40 \cdot 1,2 \cdot 0,8 \cdot 15 \cdot 5}$

15 ...... 5 ....25 .... 1,5 ....1,8......... $\frac{4 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 25 \cdot 1,5 \cdot 1,8}{40 \cdot 1,2 \cdot 0,8 \cdot 15 \cdot 5}$

Se obţine după efectuarea calculelor că numărul de zile necesar pentru săparea şanţului este de 9.

Revăzând modul în care au fost scrise datele problemei, regula de aflare a lui x din problema scrisă schematic (când unele mărimi sunt în relaţia de invers proporţionalitate cu mărimea care trebuie aflată, iar celelalte mărimi sunt într-o relaţie de proporţionalitate directă) devine uşor de enunţat:

Valoarea necunoscutei se exprimă printr-o fracţie care are la numărător produsul dintre valoarea cunoscută a mărimii căutate şi produsele valorilor corespunzătoare mărimilor din primul rând cu care este invers proporţională şi a valorilor produselor din al doilea rând cu care este direct proporţională, iar la numitor produsul valorilor din primul rând cu care este în proporționalitate directă și produsul valorilor de pe rândul al doilea cu care este într-o relație de proporționalitate inversă.

În cazul problemei 6 se obține:

A .... B .... C .... D .... E .... F
12.......... 8 .... 40 .... 1,2 .... 0,8 .... 4 zile
15.......... 5 .... 25 .... 1,5 .... 1,8 .... x zile
i.p.......... i.p......... d.p.........d.p........... d.p.

și conform regulii de trei compusă se obține: $x = \dfrac{4 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 25 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}8}{40 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 15 \cdot 5}$

care după efectuarea calculelor ne dă x = 9 zile.

Observație: în problema 6 mărimile: C, D, E pot fi înlocuite printr-o singură mărime V – volumul, unde V = C · D · E și atunci problema poate avea următorul enunț:

12 muncitori lucrând 8 ore pe zi sapă un șanț care are un volum de: $40 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}8\ m^3$. În câte zile 15 muncitori lucrând câte 5 ore pe zi vor săpa un șanț cu un volum de: $25 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}8\ m^3$.

Este evident că acest enunț al problemei este mult mai natural iar rezolvarea este mult simplificată.

Regula de trei compusă poate fi aplicată în rezolvarea problemelor de aritmetică și în situația în care toate mărimile din problemă sunt în același fel de corespondență (direct proporționale sau invers proporționale) cu mărimea ce trebuie aflată. Vom exemplifica acest lucru prin problema următoare:

Problema 7. O echipă formată din 12 muncitori agricoli, lucrând câte 8 ore pe zi, ară un ogor în 5 zile. În câte zile va ara același ogor o echipă de 15 muncitori agricoli care lucrează câte 4 ore pe zi ?

Rezolvare

Schematic problema se scrie:

12 mun. .... 8 ore .... 5 zile .... 1 întreg
15 mun. ....4 ore .... x zile ....1 întreg
i.p. i.p.

Conform regulii de trei compusă obținem: $x = \frac{5 \cdot 12 \cdot 8}{15 \cdot 4}$, care după efectuarea calculelor ne dă x = 8 zile.

Observație: problema 7 putea fi rezolvată aplicând de mai multe ori regula de trei simplă, după cum urmează:
12 mun. .... 8 ore .... 5 zile
15 mun. .... 8 ore .... y zile

Cum între numărul de muncitori și numărul de zile există o dependență de invers proporționalitate, se va obține că:
$y = \frac{12 \cdot 5}{15} = 4$ zile
15 mun. .... 8 ore .... 4 zile
15 mun. .... 4 ore .... x zile

Cum între numărul de ore lucrate pe zi și numărul de zile lucrate este o dependență de invers proporționalitate, obținem că: $x = \frac{4 \cdot 8}{4} = 8$ zile.

Procedeul de aplicare a regulii de trei simplă de mai multe ori se numește tot regula de trei compusă.

Probleme propuse

1. Dacă 50 de caiete costă 100 lei, cât ar costa 7 caiete de același fel ?

2. Dacă 4 Kg de mere costă 12 lei, cât ar costa 17 Kg de mere de același fel ?

3. 15 m de material costă 750 lei. Cât vor costa 27 m din același material ?

3. O roată face 100 de rotații în două minute. Câte rotații va face roata în patru minute ?

5. Pentru a realiza 50 caiete s-au consumat 4 Kg hârtie. Câte kilograme de hârtie se vor consuma pentru a realiza 70 de caiete ?

6. Din 6 Kg cafea verde se obțin 5 Kg cafea prăjită. Din câte kilograme de cafea verde se obțin 80 Kg cafea prăjită ?

7. Din 50 Kg grâu se obțin 40 Kg făină. Din câte kilograme de grâu se vor obține 30 Kg de făină ?

8. Două mobile aflate în mișcare rectilinie și uniformă parcurg aceeași distanță. Raportul vitezelor lor este 0,4. Să se calculeze raportul intervalelor de timp în care este parcursă această distanță.

9. Patru muncitori termină o lucrare în 6 ore. În câte ore termină lucrarea opt muncitori ?

10. Șase muncitori termină o lucrare în 8 ore. În câte ore termină aceeași lucrare trei muncitori ?

11. Un mobil se mișcă uniform și rectiliniu cu viteza de 40 Km/h și parcurge o anumită distanță în două ore. În cât timp va parcurge mobilul aceeași distanță dacă viteza sa va fi de 60 Km/h ?

12. Patru robinete pot umple un bazin în 6 ore. În cât timp vor umple bazinul doar două dintre ele știind că toate robinetele au același debit ?

13. Trei robinete pot umple un bazin în 4 h. În cât timp vor umple bazinul 6 robinete care au același debit cu primele trei ?

14. Trei tractoare pot ara o suprafață agricolă în 6 h. În cât timp vor ara 14 tractoare aceeași suprafață agricolă ?

15. Pentru a vopsi un cub s-a folosit 1 Kg de vopsea. Câte kilograme de vopsea vor fi necesare pentru a vopsi un cub cu muchia de două ori mai mare decât a primului cub ?

16. Un bazin în formă de cub este umplut cu apă de o pompă în 45 min. În cât timp se va umple cu aceeaşi pompă un bazin de forma unui cub care are muchia de două ori mai mare decât muchia primului cub ?

17. Din 12 Kg semințe de bumbac se obțin 2,7 Kg ulei. Pentru a obține 8,1 Kg de ulei, de câte kilograme de semințe avem nevoie ?

18. O bucată de metal cu volumul de 2 cm^3 are masa de 5,2 g. Ce volum are o bucată din acelaşi metal, cu masa de 26 g ?

19. Patru muncitori pot termina o lucrare în două zile, lucrând câte patru ore pe zi. În câte zile vor termina aceeaşi lucrare doi muncitori care vor lucra câte opt ore pe zi ?

20. Pentru a strânge 600 litri apă, 4 robinete trebuie deschise 2 h. Cât timp trebuie deschise 6 robinete care au acelaşi debit cu primele 4, pentru a strânge 1200 litri de apă ?

21. Pentru a ara o suprafață agricolă de 400 ha, două tractoare lucrează 10 zile. Dar pentru a ara o suprafață agricolă de 800 ha, în 20 zile, de câte tractoare este nevoie ?

22. Din 10 Kg bumbac s-a țesut o bucată de pânză lungă de 40 m şi lată de 1 m. Câți metri de pânză se pot țese din 20 Kg bumbac, dacă pânza are lățimea de 0,5 m ?

23. Pentru a realiza 240 m pânză, 20 țesetoare au lucrat 4 zile. În câte zile 5 țesătoare vor realiza 120 m pânză de aceeaşi calitate cu prima ?

24. Pentru transportul a 4,5 t marfă pe distanța de 20 Km, s-au plătit 80 lei. Câți lei se vor plăti pentru transportul a 9 t marfă pe distanța de 40 Km ?

25. Zece camioane pot transporta o cantitate de 1500 t marfă în 4 zile făcând câte 8 transporturi pe zi fiecare. În câte zile pot transporta cele zece camioane o cantitate de 15000 t de marfă ?

26. O echipă formată din 10 muncitori poate termina o lucrare în 20 de zile. După ce echipa lucrează 10 zile, 6 muncitori sunt trimişi să lucreze în altă parte. În câte zile vor termina lucrarea muncitorii care au rămas ?

27. Un zugrav poate termina o lucrare în 7 zile. după ce lucrează 3 zile, pentru urgentarea lucrării mai este angajat încă un zugrav. După câte zile de la angajarea celui de al doilea zugrav, va fi terminată lucrarea de cei doi ?

28. Dacă pentru amenajarea unui parc de distracții pentru copii ar lucra 32 de elevi timp de 75 zile câte 8 ore pe zi, s-ar efectua $\frac{25}{28}$ din lucrare. Conducerea şcolii s-a angajat să termine lucrarea în 16 zile. Ştiind că s-a lucrat câte 6 ore pe zi, să se afle câți elevi au participat la această acțiune ?

Indicații şi răspunsuri

1. 50 c .... 100 lei

7 c .... x. Cum numărul de caiete şi valoarea caietelor sunt mărimi direct proporționale, x se află cu regula de trei simplă: $x = \frac{100 \cdot 7}{50} = 14$ lei.

2. Acelaşi raționament ca în problema precedentă ne conduce la: $x = \frac{12 \cdot 17}{4} = 51$ lei.